



Instituto de Educación Secundaria
Alfonso X el Sabio
www.iax.es



Región de Murcia
Consejería de Educación,
Juventud y Deportes

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CUADERNILLO DE PENDIENTES

MATEMÁTICAS I

1º BACHILLERATO DE CIENCIAS

	PRUEBA 1: 13 al 15 de Enero	PRUEBA 2: 7 al 9 de Abril	PRUEBA GLOBAL: 5 al 7 de Mayo
Matemáticas I	1) Números reales y Álgebra 2) Trigonometría 3) Números complejos 4) Vectores	5) Geometría analítica 6) Funciones elementales 7) Límites y continuidad 8) Derivadas y aplicaciones	Toda la materia

RECOMENDACIONES

- ❖ **Para repasar la materia puedes realizar los ejercicios propuestos.**
- ❖ Para preparar la **primera prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 1 hasta la actividad 8.
- ❖ Para preparar la **segunda prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 9 hasta la actividad 15.
- ❖ **Cuantos más ejercicios hagas mejor preparado irás al examen.**

PRIMERA PRUEBA:

ACTIVIDAD 1. RADICALES

1.- Reducir a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{4}, \sqrt{5}, \sqrt[4]{7}$ b) $\sqrt[4]{a^3}, \sqrt[6]{a^2}, \sqrt[3]{a^4}$ c) $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{ab}$
 Sol: a) $\sqrt[12]{4^3}, \sqrt[12]{5^6}, \sqrt[12]{7^3}$ b) $\sqrt[12]{a^9}, \sqrt[12]{a^4}, \sqrt[12]{a^4}$ c) $\sqrt[12]{b^6}, \sqrt[12]{a^4}, \sqrt[12]{b^3a^3}$

2.- Extraer factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt{\frac{27}{4}}$ d) $4\sqrt{8b^3a^7}$
 e) $\sqrt[3]{\frac{729}{512}}$ f) $\sqrt[3]{-125}$ g) $\sqrt[3]{\frac{b^6}{216}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{-1}{27b^6}}$
 i) $\sqrt[5]{\frac{-32}{b^{10}}}$ j) $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$ k) $\sqrt{4x^6y^{12}}$ l) $\sqrt[4]{14641}$

Sol: a) $2\sqrt{2}$; b) $2\sqrt[3]{2}$; c) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; d) $8a^3 \cdot b\sqrt{2ab}$; e) $\frac{9}{8}$; f) -5 ; g) $\frac{b^2}{6}$;
 h) $\frac{-1}{3b^2}$; i) $\frac{-2}{b^2}$; j) $\frac{6}{7}$; k) $2x^3y^6$; l) 11

3.- Introduce los factores en el radical y simplifica:

a) $2x\sqrt{x}$ b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$ d) $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$
 e) $\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy}$ f) $3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx}$ g) $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}}$ h) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{21}}$

Sol: a) $\sqrt{4x^3}$; b) $\sqrt[3]{3^4}$; c) $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$; d) $\sqrt{\frac{x}{96}}$; e) $\sqrt{4x^3y}$; f) $\sqrt{3m^3x^5}$; g) $\sqrt[3]{\frac{a^4}{6}}$; h) $\sqrt{\frac{14}{3}}$

4.- Simplifica:

a) $\sqrt[3]{81b^7}$ b) $\sqrt[5]{128m^{10}}$ c) $\sqrt[7]{256b^{14}c^{11}}$
 d) $\sqrt[4]{b^7m^3}$ e) $\sqrt{2,7b^3}$ f) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}b^7m^{45}}$

c) $\sqrt{8}(\sqrt{2} - 5\sqrt{6} + \sqrt{18})$ d) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(7\sqrt{3} - 2)$

e) $\sqrt{\sqrt{13} + 3}\sqrt{\sqrt{13} - 3}$ f) $(9\sqrt{5} - 7)(9\sqrt{5} + 7)$

Sol: a) $7+5\sqrt{7}$ b) 2 c) $16-20\sqrt{3}$ d) $42-4\sqrt{3}+35\sqrt{6}-10\sqrt{2}$ e) 2 f) 356

10.- Calcular las siguientes sumas:

a) $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27} - \sqrt{12}$ b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{64}$

c) $5\sqrt[3]{8} - 3(\sqrt{4} + \sqrt[10]{32}) - 8\sqrt[3]{16} + \frac{1}{\sqrt{8}}$

Sol: a) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{11}{2}\sqrt{2}$ c) $-\frac{1}{4}(23\sqrt{2} - 24)$

11.- Realiza las siguientes sumas:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$

e) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{32}$ f) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$

g) $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300} - \sqrt{108}$ h) $\sqrt{75a^3b^2} + \sqrt{3ab^4}$

Sol: a) $5\sqrt{2}$; b) 0; c) $3\sqrt{2}$; d) $14\sqrt{5}$; e) $8\sqrt{2}$; f) $6\sqrt{6}$; g) $47\sqrt{3}$; h) $(5ab + b^2)\sqrt{3a}$

12.- Opera:

a) $2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125}$ b) $\frac{1}{4}\sqrt{128} + 6\sqrt{512} - \frac{1}{2}\sqrt{32} - 3\sqrt{98}$

c) $\frac{2}{5}\sqrt{20} - \frac{3}{5}\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{180} + 6\sqrt{45}$ d) $\frac{4}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48}$

e) $5\sqrt{44} - 3\sqrt{275} + 6\sqrt{396} - \sqrt{1331}$ f) $7\sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 5\sqrt{343} - 2\sqrt{7}$

Sol: a) $5\sqrt{5}$; b) $75\sqrt{2}$; c) $\frac{97}{5}\sqrt{5}$; d) $-2\sqrt{3}$; e) $20\sqrt{11}$; f) $35\sqrt{7}$

ACTIVIDAD 2. LOGARITMOS

1.- Calcular:

a) $\log_2 8$	f) $\log_2 0,25$	k) $\log_4 64 + \log_8 64$	o) $\log 3 / \log 81$
b) $\log_3 9$	g) $\log_{0,5} 16$	l) $\log 0,1 - \log 0,01$	p) $\log_2 3 \times \log_3 4$
c) $\log_4 2$	h) $\log_{0,1} 100$	m) $\log 5 + \log 20$	q) $\log_9 25 \div \log_3 5$
d) $\log_{27} 3$	i) $\log_3 27 + \log_3 1$	n) $\log 2 - \log 0,2$	r) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$
e) $\log_5 0,2$	j) $\log_5 25 - \log_5 5$	ñ) $\log 32 / \log 2$	s) $\log_{\sqrt{2}} 2$

Sol: a) 3; b) 2; c) 0,5; d) 1/3; e) -1; f) -2; g) -4; h) -2; i) 3; j) 1; k) 5; l) 1; m) 2; n) 1; ñ) 5; o) 0,25; p) 2; q) 1; r) 2/3; s) 2

2.- Determinar el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_3 81 = x$	g) $\log_x 25 = -2$	m) $\log_4 64 = (2x - 1) / 3$
b) $\log_5 0,2 = x$	h) $\log_{2x+3} 81 = 2$	n) $\log_6 [4(x - 1)] = 2$
c) $\log_2 16 = x^3 / 2$	i) $x + 2 = 10^{\log 5}$	ñ) $\log_8 [2(x^3 + 5)] = 2$
d) $\log_2 x = -3$	j) $x = 10^{4 \log 2}$	o) $x = \log 625 / \log 125$
e) $\log_7 x = 3$	k) $x = \log 8 / \log 2$	p) $\log(x + 1) / \log(x - 1) = 2$
f) $\log_x 125 = 3$	l) $\log_{9/16} x = 3/2$	q) $\log(x - 7) / \log(x - 1) = 0,5$

Sol: a) 4; b) -1; c) 2; d) 1/8; e) 343; f) 5; g) 1/5; h) 3; i) 3; j) 16; k) 3; l) 27/64; m) 5; n) 10; ñ) 3; o) 4/3; p) 3; q) 10

ACTIVIDAD 3. ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

9.- Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales:

- a) $\log 4x = 3 \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 3$
- b) $\log (2x-4) = 2$
- c) $2 \cdot \log (3-x) = -1$
- d) $\log (x+1) + \log x = \log (x+9)$
- e) $\log (x+3) = \log 2 - \log (x+2)$
- f) $\log (x^2 + 15) = \log (x+3) + \log x$
- g) $\frac{\log(7+x^2)}{\log(x-4)} = 2$
- h) $2 \cdot \log (3x-4) = \log 100 + \log (2x+1)^2$
- i) $\log_2 (x^2 - 1) - \log_2 (x+1) = 2$
- j) $\log^2 x - 3 \log x = -2$
- k) $2 \cdot \log (x+5) = \log (x+7)$
- l) $\log \sqrt{x-1} = \log (x+1) - \log \sqrt{x+4}$

Sol: a) 162; b) 52; c) No; d) ±3; e) 4 y 1; f) 5; g) 9/8; h) -14/17 y -6/23; i) 5; j) 10 y 100; k) -3; l) 5

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- a) $\log_3 (x+2) + \log_3 (x-4) = 3$
- b) $2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2}$
- c) $\log_3 \left(\frac{x+1}{2x-1} \right) = 2$
- d) $e^x - 6e^{-x} = 1$
- e) $\log 2 + \log (11-x^2) = 2 \log (5-x)$
- f) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$
- g) $3^x - 3^{1-x} = 2$
- h) $2^{2x} - 2^x = 12$
- i) $3 \log x - \log 30 = \log \frac{x^2}{5}$
- j) $\log (5 \log 100) = x$
- k) $3^{2x+1} - 5 = 11$
- l) $7^{3x-2} = 1$

Sol: a) x=7 b) x=-1 - $\frac{\log 3}{\log 2}$ c) x = $\frac{10}{17}$ d) x = ln 3 e) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ f) x=2 g) x=1 h) x=2 i) x=6 j) x=2 k) x = $\frac{2 \log 2}{\log 3} - \frac{1}{2}$ l) x = $\frac{2}{3}$

ACTIVIDAD 4. SISTEMAS LINEALES (MÉTODO DE GAUSS)

- 1) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$ S.C.D. (1,-2,3)
- 2) $\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{cases}$ S.I.
- 13) $\begin{cases} x+y-3z+w=0 \\ x-y+z+w=2 \\ x+2y-5z-w=-3 \\ x-2y+3z-9w=-7 \end{cases}$ S.C.I. (λ, 2-λ, λ, 1)
- 14) $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$
- 25) $\begin{cases} -x-3y+2z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ -3x+y+6z=2 \end{cases}$ S.C.D. (5,-1,3)
- 26) $\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ -x+5y-z=0 \\ x+8y+2z=0 \end{cases}$ S.C.I. (18λ, -λ, 13λ)
- 37) $\begin{cases} 2x-2y-z=7 \\ 4x-4y+2z=17 \\ 3x+2y-6z=-2 \end{cases}$ S.C.D. (41/20, -73/40, 3/4)
- 38) $\begin{cases} x+y+z=515 \\ x+3y-4z=0 \\ -9x+8y=0 \end{cases}$ S.C.D. (160, 180, 175)

ACTIVIDAD 5. SISTEMAS NO LINEALES

- 1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 290 \\ x + y = 24 \end{cases}$ (13,11); (11,13)
- 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ (0,3); (12/5, -9/5)
- 3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y + 3 = 3x \end{cases}$ (2,3); (-1/5, -18/5)
- 4. $\begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ y + 5 = 3x \end{cases}$ (2,1); (25/18, -5/6)
- 5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$ (3,4); (-3,-4)
- 6. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (2,3); (11/2, -1/2)
- 7. $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2(x+y) \\ y - x = 1 \end{cases}$ (2,3); (-1/3, 2/3)
- 8. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (2,3); (3,2)
- 9. $\begin{cases} y = 1 + 2x \\ x^2 + y^2 + 6x = 16 \end{cases}$ (1,3); (-3,-5)
- 10. $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{-1}{2} \end{cases}$ (2,1); (1,2/3)
- 11. $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ (2,4); (4,2)
- 12. $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases}$ (3,3)
- 13. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (9,8)
- 14. $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ (1,2); (2,1)
- 15. $\begin{cases} 4xy - 6y = 3 \\ 3x - 8y = 5 \end{cases}$ (3/2, 1/6); (9/16, 1/6)
- 16. $\begin{cases} 3xy - 4y^2 = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ (1/3, 0); (2/3, 1/2)

ACTIVIDAD 6. TRIGONOMETRÍA

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

- a) $a=6$ m, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $A=30^\circ$, $b\approx 8,49$ m, $c\approx 11,59$ m, $S_{ABC}\approx 24,60$ m²)
 b) $a=10$ dam, $b=7$ dam, $C=30^\circ$ (Soluc: $c\approx 5,27$ dam, $B\approx 41^\circ 38'$, $A\approx 108^\circ 22'$)
 c) $b=35,42$ dm, $A=49^\circ 38'$, $B=70^\circ 21'$ (Soluc: $C=60^\circ 1'$, $a\approx 28,66$ dm, $c\approx 32,58$ dm, $S_{ABC}\approx 439,94$ dm²)
 d) $a=13$ m, $b=14$ m, $c=15$ m (Soluc: $A\approx 53^\circ 7' 48''$, $B\approx 59^\circ 29' 23''$, $C\approx 67^\circ 22' 48''$, $S_{ABC}\approx 84$ m²)

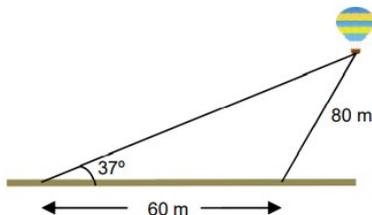
Problemas de planteamiento:

67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30° . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45° . Calcular la altura de la montaña.
 (Soluc: $\approx 136,60$ m)

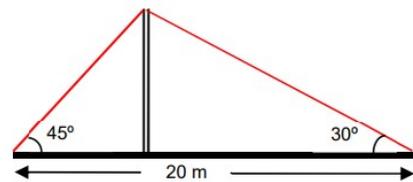
68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Cuál es la anchura del río? (Soluc: $\approx 53,21$ m)

69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120° . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc: ≈ 13 km 77 m)

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?
 (Sol: cable=25 m; mástil=7,32 m)



71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (Sol: $\approx 71,80$ m y 119.31 m. respectivamente)

**Ecuaciones trigonométricas:**

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

- | | |
|---|--|
| a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$) | f) $\sin x = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$) |
| b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Sol: $x=135^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=225^\circ+k\cdot 360^\circ$) | g) $\cos x = -1$ (Sol: $x=(2k+1)\cdot 180^\circ$) |
| | h) $\operatorname{cosec} x = -2$ (Sol: $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$) |

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

- | | |
|--|--|
| a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 360^\circ$) | o) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$) |
| b) $\sin x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (Sol: 30° , 150° , $\approx 311^\circ 24' 35''$ y $\approx 228^\circ 35' 25''$) | p) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ (Sol: $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$) |
| c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$) | q) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$) |
| | r) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=36^\circ 52' 11,6''+k\cdot 180^\circ$; $x=135^\circ+k\cdot 180^\circ$) |

ACTIVIDAD 7. NÚMEROS COMPLEJOS

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso dar el resultado en forma binómica:

<p>a) $(1+i)^2$ (Soluc: $2i$)</p> <p>b) $(2-2i)^2$ (Soluc: $-8i$)</p> <p>c) $(1+i)^3$ (Soluc: $-2+2i$)</p> <p>d) $(2+3i)^3$ (Soluc: $-46+9i$)</p> <p>e) $(1-i)^4$ (Soluc: -4)</p> <p>f) $(-2+i)^5$ (Soluc: $38+41i$)</p> <p>g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ (Soluc: $\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i$)</p> <p>h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ (Soluc: $\frac{1}{2} - i$)</p> <p>i) $(i^4 + i^{-13})^3$ (Soluc: $-2-2i$)</p> <p>j) $(1+i)^{20}$ (Soluc: -1024)</p>	<p>k) $(-2+2\sqrt{3}i)^6$ (Soluc: 4096)</p> <p>l) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ (Soluc: -1)</p> <p>m) $(4 - 4\sqrt{3}i)^3$ (Soluc: -512)</p> <p>n) $(-2+2\sqrt{3}i)^4$ (Soluc: $-128+128\sqrt{3}i$)</p> <p>o) $(\sqrt{3}-i)^5$ (Soluc: $-16\sqrt{3}-16i$)</p> <p>p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}\right)^3$ (Soluc: $27i$)</p> <p>q) $(-1+i)^{30}$ (Soluc: $2^{15}i$)</p> <p>r) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ (Soluc: $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$)</p>
--	--

54. Dados los complejos $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = 1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $(z_1)^4$ d) $\overline{z_2}$ (Sol: a) $\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$; b) $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$; c) $-8 + 8\sqrt{3}i$; d) $-3i$)

55. Dado el complejo $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, calcular $z^5 \cdot \overline{z}$ (Soluc: -64)

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con (*)), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ (Soluc: $\sqrt[8]{2}_{11,25^\circ}$; $\sqrt[8]{2}_{101,25^\circ}$; $\sqrt[8]{2}_{191,25^\circ}$; $\sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}$)

b) $\sqrt[3]{1-i}$ (Soluc: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$)

(*) c) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$ (Soluc: $\sqrt[4]{2}_{60^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{150^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{240^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{330^\circ}$)

d) $\sqrt[3]{\frac{-1+3i}{2-i}}$ (Soluc: $\sqrt[6]{2}_{45^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{165^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{285^\circ}$)

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ (Soluc: i ; $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$)

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

<p>a) $x^3+8=0$ (Soluc: $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$)</p> <p>b) $x^4-16=0$ (Soluc: $\pm 2, \pm 2i$)</p>	<p>d) $x^4+1=0$ (Soluc: $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$)</p>
--	---

ACTIVIDAD 8. VECTORES EN EL PLANO**Ángulo de dos vectores:**

33. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos (cada apartado en diferentes ejes):

a) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,3)$	(Soluc: 45°)	e) $\vec{x} = (-5,12)$ y $\vec{y} = (8,-6)$	(Sol: $\cong 149^\circ 29'$)
b) $\vec{u} = (\sqrt{3},1)$ y $\vec{v} = (1,\sqrt{3})$	(Soluc: 30°)	f) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (-9,3)$	(Soluc: 135°)

Problemas con parámetros:

46. Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1)$ y $\vec{v} = (a,3)$, calcular **a** de modo que:

a) \vec{u} y \vec{v} sean ortogonales	(Soluc: $a=3/2$)
b) \vec{u} y \vec{v} formen 60°	(Soluc: $a = \frac{24 + 15\sqrt{3}}{11}$)
c) \vec{u} y \vec{v} tengan la misma dirección	(Soluc: $a=-6$)

47. Dados los vectores $\vec{a} = (1,-1)$ y $\vec{b} = (2,m)$, hallar **m** de forma que:

a) \vec{a} y \vec{b} sean ortogonales.	(Soluc: $m=2$)
b) \vec{a} y \vec{b} tengan la misma dirección.	(Soluc: $m=-2$)
c) \vec{b} sea unitario.	(Soluc: \nexists soluc.)
d) \vec{a} y \vec{b} formen 45°	(Soluc: $m=0$)

SEGUNDA PRUEBA:**ACTIVIDAD 9. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO**

31.- Determinar el punto de corte de : $r \equiv (x,y) = (-3,2) + \lambda(2,-1)$ $\lambda \in R$, $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$ Sol: (1,0)

32.- En el triángulo A(1,2), B(5,1) y C(3,4) hallar la longitud de la altura sobre BC, la longitud del lado BC, la longitud de la altura y el área del triángulo. Sol: $2x-3y+4=0$; $\sqrt{13}$; $10/\sqrt{13}$; $5u^2$.

33.- Calcular el área del triángulo limitado por las rectas $r \equiv x-y-1=0$; $s \equiv x+y-3=0$; $t \equiv y-2=0$

34.- Hallar "a" y "b" de forma que las rectas $r \equiv ax+by-1=0$ y $s \equiv 2x-3y+4=0$ sean paralelas y r pase por el punto A(1,1). Sol: $a=-2$ y $b=3$

35.- Hallar "a" para que las tres rectas se corten en un punto:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}; s \equiv 3x - y - 7 = 0 \quad y \quad t \equiv x + ay + 2a = 0$$

Sol: $a=-9/7$

36.- Determinar la recta r que pasa por el punto de corte de las rectas $s \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$ y

$$t \equiv \frac{x}{-3} - \frac{y-1}{2} \text{ y es paralela a la recta } u \equiv \frac{x}{1/2} + \frac{y}{-3} - 1.$$

Sol: $r \equiv 6x-y+1=0$

37.- Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,2), B(5,0), C y D. Se sabe que los lados AD y BC son paralelos a la recta $(x,y) = (-7,2) + \lambda(1,1)$ $\lambda \in R$, y que el punto P(6,4) pertenece a la recta que pasa por C y D. Hallar estos vértices. Sol: C(8,3), D(4,5).

38.- Dadas las rectas $r \equiv 4x - y - 3 = 0$, $s \equiv x + 2y - 12 = 0$ y $t \equiv x - y = 0$ hallar:

- | | |
|--|------------------------------|
| a) Los vértices del triángulo que determinan. | Sol: A(1,1), B(4,4), C(2,5). |
| b) La ecuación de la altura sobre el lado contenido en la recta t. | Sol: $x+y-7=0$. |
| c) La longitud del lado contenido en r. | Sol: $\sqrt{17}$. |
| d) La longitud de la altura sobre el lado contenido en s. | Sol: $9/\sqrt{5}$. |
| e) Área del triángulo. | Sol: $9/2$. |

ACTIVIDAD 10. DOMINIOS

1.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones polinómicas y racionales:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^3 - x - 8$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$

d) $f(x) = x^9 - 6x^4 + 9$

e) $f(x) = x^5 - 2x + 6$

f) $f(x) = (x-1)^3$

g) $f(x) = \frac{1}{7-3x}$

h) $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$

i) $f(x) = \frac{7}{x^2 - 5}$

j) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

k) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$

l) $f(x) = \frac{7x+9}{x^3 + 8}$

2.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = 6x - 2\sqrt{x} + 8$

l) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x - 3}$

v) $f(x) = -4 + \sqrt{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$

m) $f(x) = \sqrt{3x - x^2 + 4}$

w) $f(x) = \sqrt{4-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

x) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$

3.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(-3x+2)$

j) $f(x) = \log\left(\frac{x+7}{x}\right)$

r) $f(x) = \frac{2^x}{2^x - 4}$

b) $f(x) = \log\sqrt{-3x}$

k) $f(x) = \frac{2x-9}{\log\sqrt{x+3}}$

s) $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

c) $f(x) = \ln(5-x^2)$

l) $f(x) = 5^{x-2}$

y) $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$

ACTIVIDAD 11. OPERACIONES CON FUNCIONES

5.- Dadas las siguientes funciones, efectúa las operaciones que se indican, indicando el dominio de la función resultante:

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

$g(x) = x^2 - 6$

$h(x) = \frac{6x}{x^2 - 4}$

$p(x) = \sqrt{x+1}$

$j(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$k(x) = \frac{x+2}{x^2 - 1}$

$l(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

$m(x) = x - 4$

$s(x) = \frac{3-x}{x-1}$

$r(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

- | | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------|
| a) $f+g$ | d) $j+k$ | g) $j-r$ | j) $j-s$ | m) $h \cdot k$ | p) $j \cdot s$ | s) k/s |
| b) g/p | e) $g \circ m$ | h) $m \circ g$ | k) $f \circ m$ | n) $m \circ j$ | q) $p \circ r$ | t) s^{-1} |
| c) $p \circ j$ | f) $s \circ p$ | i) $r \circ s$ | l) m^{-1} | o) j^{-1} | r) r^{-1} | u) g^{-1} |

ACTIVIDAD 12. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES E INVERSA

8.- Sean las funciones: $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$, calcular: **a)** $g \circ f$; **b)** $f \circ g$

Sol: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{3x+5}{6x+5}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) = \frac{7x+11}{2x+1}$

9.- Dadas las funciones: $f(x) = \frac{1}{2x-1}$; $g(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, calcular: **a)** $g \circ f$; **b)** $f \circ g$; **c)** $h \circ g \circ f$; **d)**

$h \circ f \circ g$; **e)** f^{-1} ; **f)** Probar que $f^{-1} \circ f = I$; **g)** Probar que: $f \circ f^{-1} = I$

Sol: a) $(g \circ f)(x) = \frac{3-2x}{2x+1}$; b) $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$; c) $(h \circ g \circ f)(x) = \frac{2x+1}{3-2x}$; d) $(h \circ f \circ g)(x) = \frac{2x-3}{2x+1}$

10.- Dadas las funciones: $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, Calcular: **a)** $g \circ f$, **b)** $f \circ g$, **c)** f^{-1} , **d)** Probar que $f^{-1} \circ f = I$

Sol: a) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$; b) $(f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$; c) $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{2x-1}$

ACTIVIDAD 13. LÍMITES Y CONTINUIDAD

27.- Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{-5x - 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 + 1}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{7+x} - 3}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1-x} - 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 + x - 3}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x}{\sqrt{1+x^2}}$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2 - 3x})$

r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

s) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^2 + ax - 2a^2}$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{2 - \sqrt{x+4}}$

u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x} \right)$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$

w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 2} - \sqrt{4x^2 - 5x + 2})$

Sol: a) $-1/2$; b) 0; c) $1/2$; d) 0; e) No existe; f) -2 ; g) 1; h) 0; i) 24; j) -10 ; k) 2; l) $13/7$; m) 8; n) -7 ; ñ) $1/4$; o) 2; p) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; q) $+\infty$; r) $1/6$; s) $1/3$; t) -4 ; u) 0; v) 3; w) $9/4$.

26. Calcular cuánto debe valer a para que la siguiente función sea continua $\forall x$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=0$)

27. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y $f(2)=3$ (Soluc: $a=1$ y $b=-1$)

29. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx+n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2+10x-11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de m y n para que $f(x)$ sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica). (Soluc: $m=3$, $n=1$)

30. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-1/2$, $b=-3$)

31. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+a & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-2$, $b=1$)

ACTIVIDAD 14. ASÍNTOTAS

1. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 6}$, calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
 b) Asíntotas.
 c) Gráfica aproximada.

2. Dada la curva de ecuación $y = \frac{2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$, calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
 a) Asíntotas.
 b) Gráfica aproximada.

3. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 3}$, calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
 b) Asíntotas.
 c) Gráfica aproximada.

4. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x + 1}{x^2 + x - 2}$, calcula

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
 b) Asíntotas.
 c) Gráfica aproximada.

5. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x^2 - 1}{x}$, calcula

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
 b) Asíntotas.
 c) Gráfica aproximada.

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.

ACTIVIDAD 15. DERIVADAS Y GRÁFICAS

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

c) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $y = (x^2 - 3)^2$

e) $y = \frac{2}{x^3}$

f) $y = (x^2 + x + 1)^3$

g) $y = \sqrt[3]{2x^3 - 3}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

i) $y = 3(x^2 + 1)^{10}$

j) $y = 2(3x^2 - 1)^4$

k) $y = \frac{2}{(x^2 + 1)^3}$

(Sol: a) $y' = \frac{-2}{x^3}$; b) $y' = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; c) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; d) $y' = 4x^3 - 12x$; e) $y' = \frac{-6}{x^4}$; f) $y' = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$;

g) $y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; h) $y' = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; i) $y' = 60x(x^2+1)^9$; j) $y' = 48x(3x^2-1)^3$; k) $y' = \frac{-12x}{(x^2+1)^4}$)

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^3}$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

c) $y = \frac{x + 1}{1 - x}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

e) $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2}$

f) $y = (3x^2 + 5)^5$

g) $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

(Sol: a) $y' = \frac{-2}{x^3}$; b) $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$; c) $y' = \frac{2}{(1-x)^2}$; d) $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$; e) $y' = 6x^3 - 2x$; f) $y' = 30x(3x^2 + 5)^4$

g) $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$)

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$	(Sol: $6x-y+5=0$)	c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$	(Sol: $y=-1$)
b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$	(Sol: $10x-y+12=0$)	d) $f(x)=\frac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$	(Sol: $y=-12x+30$)

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

c) $y=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $y=x^3-3x^2-9x+1$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

(Soluc: a) $\nearrow (0,\infty) \searrow (-\infty,0)$; b) $\nearrow (-1,0) \cup (1,\infty) \searrow (-\infty,-1) \cup (0,1)$; c) $\nearrow (-\infty,0) \cup (2,\infty) \searrow (0,2)$; d) $\nearrow (-\infty,1) \cup (3,\infty) \searrow (1,3)$;
e) $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; f) $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; g) $\searrow (-\infty,0) \nearrow (0,\infty)$; h) $\nearrow (-\infty,-1) \cup (3,\infty) \searrow (-1,3)$; i) $\searrow (-\infty,3) \nearrow (3,\infty)$)

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$

b) $y=\frac{x+2}{x-1}$

c) $y=x^4-2x^2$

d) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

e) $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

g) $y=-x^3+12x$

h) $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$

i) $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$

j) $y=\frac{x}{x^2+x+1}$

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.